Wartości własne i wektory własne, postać Jordana macierzy

Zad. 1 Niech V będzie dowolną przestrzenią wektorową, niech U i W będą jej podprzestrzeniami. Wykazać, że suma algebraiczna

$$U + W = \{u + w : u \in U \text{ i } w \in W\}$$

też jest podprzestrzenią przestrzeni V. Wykazać, że jest to najmniejsza (ze względu na zawieranie) podprzestrzeń przestrzeni V zawierająca U i W.

Zad. 2 Znaleźć bazę i wymiar sumy algebraicznej $W_1 + W_2$ podprzestrzeni przestrzeni R^4, gdzie $W_1 = \mathrm{Lin}\{(1, 1, 1, 0,),(0, 1, 1, 1)\}$ oraz $W_2 = \mathrm{Lin}\{(0, 1, -1, 2),(2, 1, 1, -1)\}$. Sprawdzić, czy jest to suma prosta, tzn. czy $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$.

Zad. 3 Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -34 & -11 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć $E^{-1}AE$ i zbadać, które z macierzy A, B, C, D są podobne.

Zad. 4 Znaleźć wartości i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zad. 5 Rozważmy odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ dane wzorem

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, x - z, x + y + 2z).$$

Wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im wektory własne endomorfizmu f, gdy
i) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ii) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Zad. 6 Niech
$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (4x - y - 2z, 2x + y - 2z, x - y + z) \in \mathbb{R}^3.$

Znaleźć wartości własne endomorfizmu f. Znaleźć, jeśli to możliwe, bazę $\mathbb{R}^3$ taką, żeby w tej bazie macierz endomorfizmu f była diagonalna.

Zad. 7 Niech
$f:\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \to (x+y+z, x+2y-z, x-y+2z) \in \mathbb{R}^3$ i niech

$U = \{(0,t,-t) : t \in \mathbb{R}\},$
$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}.$

Wykazać, że U i W są podprzestrzeniami niezmienniczymi endomorfizmu f.

Zad. 8 Wyznaczyć wektory własne macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Wyznaczyć podprzestrzenie niezmiennicze i określić ich wymiar. Czy istnieje baza złożona z wektorów własnych tego przekształcenia? Jeśli tak, to jaka jest macierz tego przekształcenia w tej bazie?

Zad. 9 Znaleźć macierz Jordana i bazę Jordana dla nilpotentnego endomorfizmu zadanego macierzą

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Zad. 10 Znaleźć macierz Jordana dla macierzy

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$.

Zad. 11 Sprawdź, czy jest diagonalizowalna macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. Podać wzór na A^n.

Zad. 12 Dany jest endomorfizm
$f:\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \to (3x-z, x-3y+4z, x+z) \in \mathbb{R}^3.$
Znaleźć bazę Jordana i macierz Jordana tego endomorfizmu.

Zad. 13 Wyznacz wszystkie wartości własne (spektrum) podanych endomorfizmów ϕ rzeczywistych przestrzeni liniowych i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tych podprzestrzeni (krotność geometryczną). Znaleźć rozkłady Jordana podanych endomorfizmów.

a) $\phi \in End(R^2)$, $\phi(x, y) = (x, x + y)$
b) $\phi \in End(R^2)$, $\phi(x, y) = (-y, x)$
c) $\phi \in End(R^3)$, $\phi(x, y, z) = (x, 2x + 2y, -x - y - z)$
d) $\phi \in End(R^3)$, $\phi(x, y, z) = (x - z, 2y, x + z)$
e) $\phi \in End(R^3)$, $\phi(x, y, z) = (3x - y, 6x - 2y, 2x - y + z)$.